

## Exercices sur les fonctions elliptiques

**Exercice 1.** Déterminer les positions des pôles de la fonction elliptique

$$f(z) = a\wp^2(z - \alpha|\omega_1, \omega_2) + b\wp(z - \beta|\omega_1, \omega_2)$$

et donner leurs ordres. Combien de zéros de  $f(z)$  se trouvent à l'intérieur du parallélogramme fondamental?

**Exercice 2.** La fonction

$$g(z) = \wp(2z|\omega_1, \omega_2) + \wp\left(z + 1|3\omega_1, \frac{\omega_2}{3}\right)$$

est-elle elliptique? Si oui, trouvez ses périodes.

**Exercice 3.** Exprimer la dérivée seconde  $\wp''(z)$  en fonction de  $\wp(z)$ :

1. en utilisant l'équation différentielle pour  $\wp(z)$ ;
2. en utilisant les propriétés analytiques de  $\wp(z)$  (périodicité, pôles, parité, etc).

**Exercice 4.** Montrer que l'équation  $\wp(z) = \text{const}$  a au plus 2 solutions à l'intérieur du parallélogramme fondamental. Donner les valeurs de  $\wp(z)$  de multiplicité 2.